Concours commun INA-ENSA — MATHÉMATIQUES — Durée : 3 heures — DEUXIÈME COMPOSITION (Option générale)

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Dans tout le problème, on considère deux variables aléatoires réelles X et Y, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$; elles sont supposées indépendantes et de même loi définie par la densité h sur $\mathbb{R}$, avec:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{\pi}\times\frac{1}{x^2+1}\ .$$

PREMIÈRE PARTIE

1. Vérifier que h est bien une densité de variable aléatoire; déterminer la fonction de répartition de X. X a-t-elle une espérance?

2. On considère la variable aléatoire réelle U définie pour tout ω de Ω par:
$U(\omega) = \ln|X(\omega)|$ si $X(\omega)\neq 0$ et $U(\omega) = 0$ sinon.

2.a. Préciser, pour u réel, l'événement $[U\leq u]$.

2.b. Déterminer la fonction de répartition et une densité de U.

2.c. Justifier l'existence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$$

et montrer que I = 0. (On pourra considérer le changement de variable $t\mapsto\frac{1}{t}$.)

2.d. Déduire de ce qui précède que U admet une espérance et la calculer.

DEUXIÈME PARTIE

On considère la variable aléatoire réelle Z définie pour tout ω de Ω par:

$$Z(\omega) = |X(\omega) - Y(\omega)|.$$

1. Justifier, pour tout t réel, l'existence de l'intégrale $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}(x+t)}{x^2+1}\,dx$;
montrer que la fonction Φ ainsi définie est impaire. Calculer $\Phi(0)$.

2. On se propose de déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.

2.a. Quelle est la loi du couple (X,Y)?

2.b. Pour tout z strictement négatif, préciser l'événement $[Z\leq z]$ et calculer $P([Z\leq z])$.

2.c. Montrer que, pour tout z réel positif, $P([Z\leq z]) = \frac{2}{\pi^2}\,\Phi(z)$.

3. On pose $f(x,t) = \frac{\mathrm{Arctan}(x+t)}{x^2+1}$.

3.a. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$.

3.b. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$.

4. On admet que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad \Phi'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)[(x+t)^2+1]} .$$

4.a. Calculer $\Phi'(0)$.

4.b. On suppose que $t\neq 0$. Montrer qu'il existe deux réels α et β, fonctions de t, tels que

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \frac{1}{(x^2+1)[(x+t)^2+1]} = \alpha\left[\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{x+t}{[(x+t)^2+1]}\right] + \beta\left[\frac{1}{(x^2+1)} + \frac{1}{[(x+t)^2+1]}\right]$$

4.c. En déduire une expression de $\Phi'(t)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4.d. Montrer que Φ' est continue sur $\mathbb{R}$ et en déduire que

$$\forall z\in\mathbb{R}^* \qquad P([Z\leq z]) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{z}{2} .$$

TROISIÈME PARTIE

On pose, pour tout t réel, $K(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{x^2+1}\,dx$.

Le but de cette partie est l'étude de la fonction K en utilisant des arguments probabilistes.

On considère la variable aléatoire réelle T, définie pour tout ω de Ω par

$T(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ si $X(\omega)\neq 0$ et $T(\omega) = 0$ sinon.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction K.

2. Préciser l'événement $[T\leq t]$. Justifier, pour tout t réel, l'égalité :

$$P([T\leq t]) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} K(t) .$$

3.a. Calculer $K(0)$ et $K(1)$. Montrer que K est impaire.

3.b. Montrer que K est croissante et que $\lim_{t\to+\infty} K(t) = \frac{\pi^2}{4}$.

Etudier la limite de $K(t)$, quand t tend vers 0 par valeurs supérieures.

4. Dans la suite, on suppose t strictement positif.

4.a. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)[(xt)^2+1]}$ existe.

4.b. On admet que K est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall t\in\mathbb{R}^{+*} \qquad K'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)[(xt)^2+1]} .$$

Donner une expression simplifiée de $K'(t)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (sans intégrale); on sera amené à distinguer les cas $t=1$ et $t\neq 1$. En déduire que K' est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5. Déduire des questions précédentes l'égalité:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = \frac{\pi^2}{4} .$$